

Gruppenübung 5

Aufgabe 1 Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Geben Sie jeweils an, ob mit der folgenden Wahl für Q und R ein LQR Reglerentwurf mit garantierter Stabilität möglich ist.

Lösung:

Es gilt in jedem Fall zu prüfen ob

- Q positiv semidefinit
- R positiv definit
- (A, B) stabilisierbar
- (A, M) entdeckbar mit $Q = M^T M$

Nun sind Q und R immer diagonal, d.h. wir können die Definitheit von Q und R ohne weitere Rechnung ablesen. Für die Stabilisierbarkeit von (A, B) und die Entdeckbarkeit von (A, M) verwenden wir den Hautustest. Es gilt

$$\text{rk} \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

damit ist (A, B) stabilisierbar und eine Grundvoraussetzung ist erfüllt.

a)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 1.$$

Lösung:

Q hat den doppelten Eigenwert 1, damit ist Q positiv definit. R ist eine positive reelle Zahl, also auch positiv definit. Weiterhin ist $M = I$ und damit gilt

$$\text{rk} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ M \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 - \lambda \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

damit ist (A, M) entdeckbar und deswegen ist mit gegebenem Q und R der LQR-Entwurf mit garantierter Stabilität möglich.

b)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = 1.$$

Lösung:

Q hat einen Eigenwert bei 1 und einen bei 0, damit ist Q positiv semidefinit. R ist eine positive reelle Zahl, also auch positiv definit. Weiterhin ist $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit gilt

$$\text{rk} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ M \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 - \lambda \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

damit ist (A, M) entdeckbar und deswegen ist mit gegebenem Q und R der LQR-Entwurf mit garantierter Stabilität möglich.

c)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 1.$$

Lösung:

Q hat einen Eigenwert bei 1 und einen bei 0, damit ist Q positiv semidefinit. R ist eine positive reelle Zahl, also auch positiv definit. Weiterhin ist $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit gilt

$$\text{rk} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ M \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 - \lambda \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda = 3$ ist $\text{rk} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ M \end{pmatrix} = 1$, damit ist (A, M) nicht entdeckbar und deswegen ist mit gegebenem Q und R der LQR-Entwurf mit garantierter Stabilität nicht möglich.

d)

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 1.$$

Lösung:

nicht möglich, Q nicht positiv semi-definit

e)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 0.$$

Lösung:

nicht möglich, R nicht positiv definit

f)

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad R = -1.$$

Lösung:

nicht möglich, Q und R negativ definit

Aufgabe 2 Gegeben sei das skalare System

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x_0 = x(0),$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $x(t) \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den LQ-Regler $u(x) = -kx$ so, daß

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty qx^2 + ru^2 dt \stackrel{!}{=} \text{Min},$$

mit $q, r > 0$.

b) Bestimmen Sie nun einen Regler $u(x) = -kx$, der das System mit minimaler Stellenergie stabilisiert, d.h. $q \rightarrow 0$.

Lösung:

a) Wir betrachten nur den Fall, wo $b \neq 0$, da ansonsten die Voraussetzung der Stabilisierbarkeit für $\frac{1}{2}r$ (a, b) nicht erfüllt ist. Die algebraische Riccati-Gleichung lautet im skalaren Fall

$$2ap - \frac{1}{r}b^2p^2 + q = 0.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist

$$p_{1,2} = \frac{r}{b^2} \left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2 \frac{q}{r}} \right).$$

Wir suchen nun ein positiv semidefinites p (d.h. $p \geq 0$ im skalaren), das diese Gleichung löst. Wegen $a < \sqrt{a^2 + b^2 \frac{q}{r}}$ erhält man genau eine positive Lösung

$$p = \frac{r}{b^2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2 \frac{q}{r}} \right).$$

Für $k = \frac{1}{r}bp$ ergibt sich somit

$$k = \frac{1}{b} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2 \frac{q}{r}} \right).$$

b) Der Grenzübergang $q \rightarrow 0$ liefert:

$$k = \begin{cases} 0 & : \text{ falls } a < 0 \text{ (open loop!)} \\ 2a/b & : \text{ falls } a > 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = x_0$$

und das Kostenfunktional ($q, r > 0$)

$$J = \int_0^\infty qx^2 + ru^2 dt.$$

a) Wie lautet der Regler $u = -Kx$, der das Kostenfunktional minimiert und die zugehörige Lösung der Riccati Gleichung?

Lösung:

Betrachten wir die Lösung aus Aufgabenteil 2a) mit

$$P = \frac{r}{b^2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2 \frac{q}{r}} \right).$$

und setzen $a = b = 1$, so erhalten wir

$$P = r + \sqrt{r^2 + qr}$$

$$u = -Kx = -\frac{1}{r}bPx = -(1 + \sqrt{1 + \frac{q}{r}})x$$

b) Wo liegen die Eigenwerte des geschlossenen Kreises? Geben Sie den Zustand $x(t)$ des geschlossenen Kreises für $t > 0$ in Abhängigkeit von x_0, q und r an.

Lösung:

$$\dot{x} = (a - bK)x = (1 - (1 + \sqrt{1 + \frac{q}{r}}))x = -\sqrt{1 + \frac{q}{r}}x$$

$$\Rightarrow \lambda = -\sqrt{1 + \frac{q}{r}}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\sqrt{1 + \frac{q}{r}}t} x_0.$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe von $x(t)$

$$J_{xx} = \int_0^\infty qx^2 dt \quad \text{und} \quad J_{uu} = \int_0^\infty ru^2 dt$$

in Abhängigkeit von x_0, q und r .

Lösung:

$$J_{xx} = \int_0^\infty 0^\infty q e^{-2\sqrt{1+\frac{q}{r}}t} x_0^2 dt = \left[\frac{qx_0^2}{-2\sqrt{1+\frac{q}{r}}} e^{-2\sqrt{1+\frac{q}{r}}t} \right]_0^\infty = x_0^2 \frac{q}{2\sqrt{1+\frac{q}{r}}}$$

$$J_{uu} = \int_0^\infty ru^2 dt = \int_0^\infty r(-Kx)^2 dt = \frac{rK^2}{q} J_{xx} = \frac{rx_0^2(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}})^2}{2\sqrt{(1+\frac{q}{r})}}$$

d) Bestätigen Sie das aus der Vorlesung bekannte Ergebnis

$$J^* = J_{xx} + J_{uu} = x_0^\top P x_0.$$

Lösung:

Durch einsetzen der Ergebnisse aus dem vorherigen Aufgabenteilen bekommt man

$$\begin{aligned} \bar{J} &:= J_{xx} + J_{uu} - x_0^\top P x_0 \\ &= J_{xx} + \frac{rk^2}{q} J_{xx} - x_0^\top P x_0 \\ &= \frac{qx_0^2}{2\sqrt{1+\frac{q}{r}}} + \frac{rx_0^2(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}})^2}{2\sqrt{(1+\frac{q}{r})}} - rx_0^2(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}}). \end{aligned}$$

Erweiterung des zweiten Summanden mit $\sqrt{1+\frac{q}{r}}$ ergibt

$$\bar{J} = \frac{qx_0^2}{2\sqrt{1+\frac{q}{r}}} + \frac{rx_0^2\sqrt{1+\frac{q}{r}}(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}})^2}{2(1+\frac{q}{r})} - rx_0^2(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}})$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $\frac{1}{x_0^2}\sqrt{1+\frac{q}{r}}$ und erhalten

$$\frac{1}{x_0^2}\sqrt{1+\frac{q}{r}}\bar{J} = \frac{q}{2} + \frac{r(1+\frac{q}{r})(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}})^2}{2(1+\frac{q}{r})} - r(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}})(\sqrt{1+\frac{q}{r}}).$$

Nach Expansion der Terme im dritten Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_0^2}\sqrt{1+\frac{q}{r}}\bar{J} &= \frac{q}{2} + \frac{r(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}})^2}{2} - r(\sqrt{1+\frac{q}{r}} + (1+\frac{q}{r})) \\ &= \frac{q}{2} + \frac{r}{2} + r\sqrt{1+\frac{q}{r}} + r\frac{(1+\frac{q}{r})}{2} - r\sqrt{1+\frac{q}{r}} - r(1+\frac{q}{r}). \end{aligned}$$

Man sieht, dass die rechte Seite gleich Null ist und damit ist das Ergebnis aus der Vorlesung bestätigt.